Circuits Electriques-Régime sinusoïdal

- Objectifs : Fournir aux étudiants les outils de base nécessaires à la résolution des problèmes relatifs aux circuits fonctionnant en régime sinusoïdal permanent;
- Pré-requis : Bac scientifique (C,D,E)
- Nombre de crédits : 2 crédits
- Type d'enseignement : CM + TD
- Bibliographie :
  - Fundamentals of electric circuits (Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku)

1

Régime sinusoïdal

<u>Résultats attendus</u>

A la fin de ce cours, l'étudiant devra savoir :

- Passer du sinusoïdal temporel permanent au phasoriel et inversement
- Utiliser les lois de base de l'électrocinétique pour déterminer les grandeurs d'un circuit fonctionnant en régime sinusoïdal permanent
- Effectuer le bilan de puissance d'une installation électrique
- Améliorer le facteur de puissance d'une installation électrique
- Adapter un générateur à une charge
- Analyser un circuit lors d'un fonctionnement à la résonance
- Fournir la fonction de transfert et tracer le diagramme de Bode d'un circuit

2

Régime sinusoïdal

Programme

- Chapitre 1 : De l'expression temporelle à la représentation phasorielle
- Chapitre 2 : Application des phaseurs aux circuits électriques
- Chapitre 3 : Puissances électriques
- Chapitre 4 : Notions de résonance
- Chapitre 5 : Réponse fréquentielle

3

CHAPITRE 1

DE L'EXPRESSION TEMPORELLE A LA REPRESENTATION PHASORIELLE

4

Programme

- Grandeur sinusoïdale
- Représentation de Fresnel
- Les phaseurs
- Application des phaseurs aux éléments d'un circuit

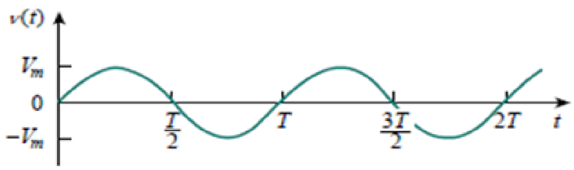
5

Pourquoi l'étude des sinusoïdes?

La nature se manifeste sous forme d'ondes sinusoïdales, qu'il s'agisse des vagues d'océan, d'un tremblement de terre, d'un bang sonique, d'une explosion, de la propagation du son dans l'air ou de la fréquence naturelle d'un corps en mouvement. Notre univers physique est imprégné d'énergie, de particules en vibration et d'autres forces invisibles. Même la lumière, à la fois onde et corpuscule, possède une fréquence fondamentale que nous percevons comme sa couleur.

6

1 . 1 Sinusoïde



$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- X_m : l'amplitude de la sinusoïde
- ω : la pulsation (en radians/seconde)
- $(\omega t + \phi)$: est l'argument (radians ou degrés)
- ϕ : est la phase (radians ou degrés)
- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot T = \frac{2\pi}{f}$

7

1 . 1 Sinusoïde

Soient $x_1(t) = X_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$

$x_2(t) = X_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$

$\phi = \phi_1 - \phi_2$

$\phi = 0$ --> x_1 et x_2 sont en phase

$\phi \neq 0$ --> x_1 et x_2 ne sont pas en phase

$\Phi = \pi$: en opposition de phase

$\Phi = \pm \pi/2$: en quadrature de phase

8

1 . Sinusoïdes

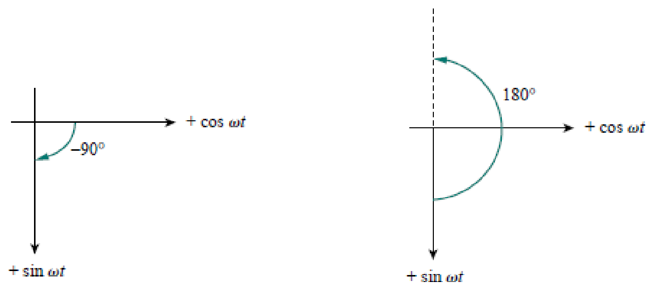
Passage sinus-cosinus

$$\sin(\omega t \pm 180°) = -\sin\omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 180°) = -\cos\omega t$$

$$\mathbf{\sin(\omega t \pm 90°) \pm \cos\omega t}$$

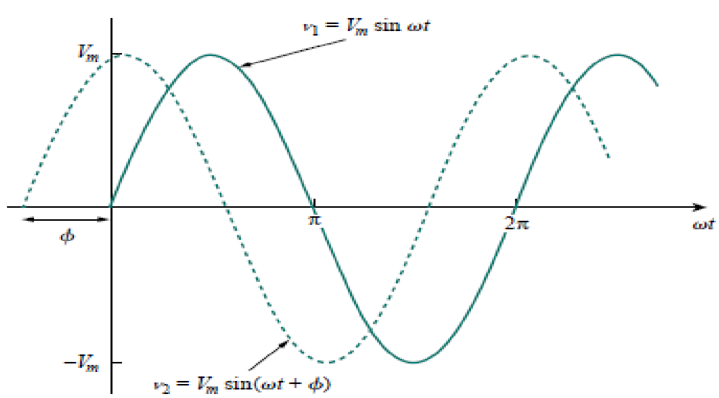
$$\mathbf{\cos(\omega t \pm 90°) \mp \sin\omega t}$$



(a) (b)

9

1.1 Sinusoïde



Comparaison :
- Même fréquence.
- Pas obligation de même amplitude
- Il vaut mieux exprimer les sinusoïdes sous la même forme (sinus ou cosinus)

10

1 . 1 Sinusoïde

Soit à effectuer $u = u_1 + u_2$ et à mettre sous la forme $U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$

$$u_1 = 10\sqrt{2}\cos 100t \qquad u_2 = 5\sqrt{2}\cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$u = 10\sqrt{2}\cos 100t + 5\sqrt{2}\left(\cos 100t \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin 100t \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u = \left(10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)\cos 100t - 5\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\sin 100t$$

$$\cos\frac{\Pi}{3} = 0.5 \qquad \sin\frac{\Pi}{3} = 0.87$$

$$u = 12.5\sqrt{2}\cos 100t - 4.35\sin 100t$$

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2}(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi)$$

$$u = U\sqrt{2}\cos\omega t\cos\varphi - U\sqrt{2}\sin\omega t\sin\varphi$$

11

1 .1 Sinusoïde

Il vient par identification :

$U\cos\varphi = 12.5$ et $U\sin\varphi = 4.35$

Divisons membre à membre :

$$\tan\varphi = \frac{4.35}{12.5} = 0.348$$

$$\varphi = 0.33$$

$$(U\cos\varphi)^2 + (U\sin\varphi)^2 = U^2 = 12.5^2 + 4.35^2$$

D’où U=13.2 V

Finalement :

$$u = 13.2\cos(100t + 0.33)$$

12

1 .2 Représentation de Fresnel

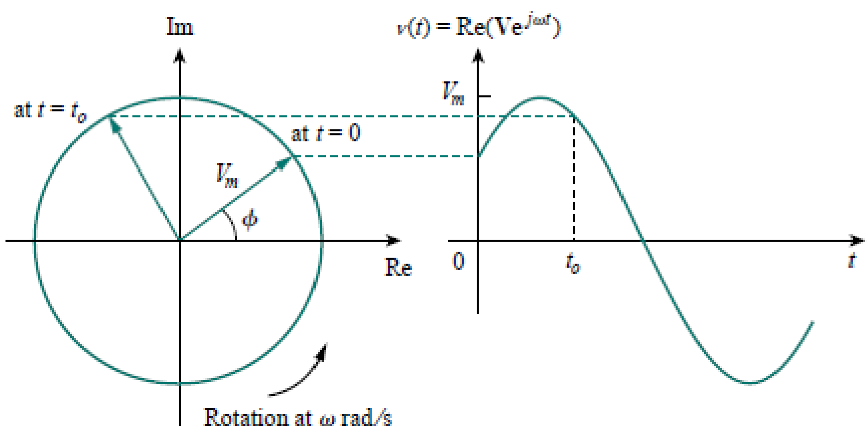
Pour pouvoir résoudre les circuits alternatifs complexes sans trop de difficultés, on représente tensions et courants par des vecteurs tournants.

Dans le plan Oxy, une tension $v = V_m \sin(\omega t + \phi)$ (ou un courant), est représentée par un vecteur de longueur égale à l'amplitude de la tension, V_m, faisant un angle $\omega t + \phi$, avec l'axe Ox. C'est donc un vecteur qui tourne dans le temps avec une fréquence angulaire ω. Cette représentation est appelée **représentation de Fresnel**.

A chaque instant la grandeur sera égale à la projection du vecteur qui la représente sur l'axe de référence.

13

1 .2 Représentation de Fresnel



(a) (b)

14

1 .2 Représentation de Fresnel

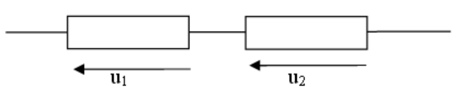
Si l'on représente sur la même construction de Fresnel plusieurs tensions de même fréquence, les vecteurs qui les représentent tournent à la même vitesse. La figure obtenue tourne donc sans se déformer

Par commodité, on choisit de la construire à t=0 . Dans ce cas, pour représenter une tension, il suffira de construire un vecteur de longueur proportionnelle à V_m faisant un angle ϕ avec l'axe choisi comme origine des phases. Toute tension sera ainsi associée à un point du plan.

15

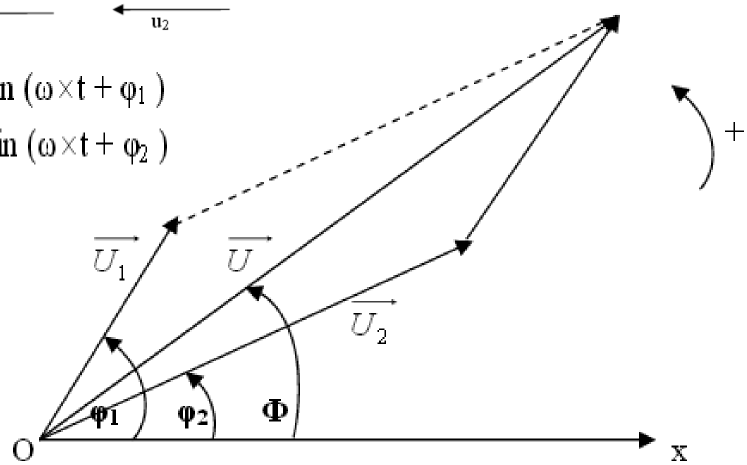
1 .2 Représentation de Fresnel

Addition de deux tensions sinusoïdales



$$u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega \times t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega \times t + \varphi_2)$$



1 . 3 Les phaseurs

Soit $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ (représentation temporelle)

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left(V_m e^{j(\omega t + \phi)}\right)$$

ou $v(t) = \mathrm{Re}\left(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right)$

D'où $v(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{V} e^{j\omega t}\right)$

Avec $\underline{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$

$\underline{V}$ est la représentation phasorielle de la sinusoïde

Comme dans le cas d'une grandeur complexe, le phaseur peut être exprimé sous forme **cartésienne, polaire ou exponentielle**.

17

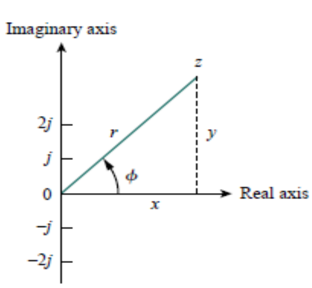
1 .3 Les phaseurs

Un Phaseur est un nombre complexe représentant l'amplitude et la phase d'une sinusoïde

Expression d'un nombre complexe :

- Forme rectangulaire $\underline{z} = x + jy$
- Forme polaire $\underline{z} = r\angle\phi$
- Forme exponentielle $\underline{z} = re^{j\phi}$

Relation entre forme rectangulaire et forme polaire :



$$\underline{z} = x + jy = r\angle\phi = r(\cos\phi + j\sin\phi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$

18

1 .3 Les phaseurs

Opérations sur les nombres complexes :

$\underline{z}_1 = x_1 + jy_1 = r_1\angle\phi_1$ $\underline{z}_2 = x_2 + jy_2 = r_2\angle\phi_2$

- Addition : $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
- Soustraction : $\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
- Multiplication : $\underline{z}_1\underline{z}_2 = r_1 r_2 \angle\phi_1 + \phi_2$
- Division : $\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\angle\phi_1 - \phi_2$

19

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

Résistance R

- *Forme temporelle* :

$$i = I_m\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow v = iR = RI_m\cos(\omega t + \varphi)$$

- *Forme phasorielle*

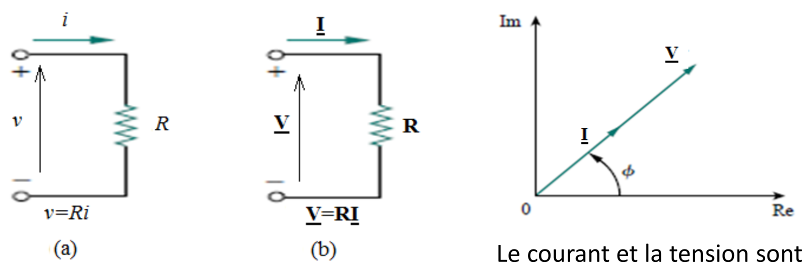
$$\underline{I} = I_m\angle\phi \longrightarrow \underline{V} = R\underline{I}$$

La relation tension-courant du domaine temporel continue d'exister dans le domaine phasoriel

20

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

•**Résistance R**



Le courant et la tension sont en phase

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

Inductance L

•*Forme temporelle* :

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow v = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$-\sin A = \cos(A + 90°) \longrightarrow v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90°)$$

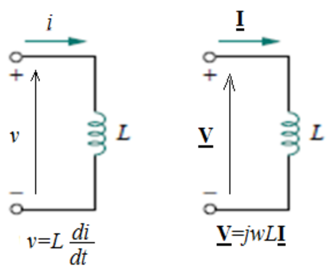
•*Forme phasorielle*

$$\underline{I} = I_m \angle\phi \longrightarrow \underline{V} = \omega L I_m e^{j(\varphi+90°)} = \omega L I_m e^{j\varphi} e^{j90°} = \omega L \cdot e^{j90°} \cdot I_m \angle\varphi$$

$$e^{j90°} = j \longrightarrow \underline{V} = j\omega L \underline{I}$$

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

•Inductance L



(a) (b)

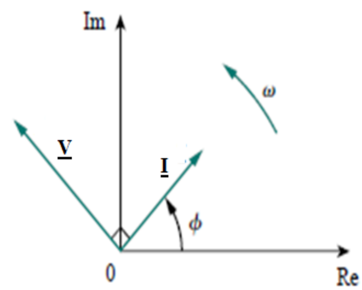


Diagramme phasoriel d'une inductance : le courant $\underline{I}$ est en retard de phase sur $\underline{V}$

23

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

•Condensateur C

•*Forme temporelle* :

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow i = C\frac{dv}{dt} = -\omega C V \sin(\omega t + \phi)$$

soit

$$i = \omega C V \cos(\omega t + \phi + 90°)$$

•*Forme phasorielle*

$$\underline{V} = V_m \angle \phi \longrightarrow \underline{I} = \omega C V_m e^{j(\phi + 90°)} = \omega C V_m e^{j\phi} e^{j90°} = \omega C \cdot e^{j90°} \cdot V_m \angle \phi$$

$$e^{j90°} = j \longrightarrow \underline{I} = j\omega C \underline{V}$$

$$\longrightarrow \underline{V} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$$

24

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

•Condensateur C

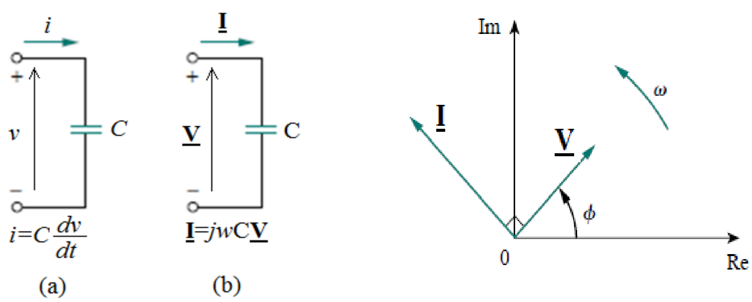


Diagramme phasoriel d'un condensateur : le courant $\underline{I}$ est en avance de phase sur $\underline{V}$

25

1 . 4 Application des phaseurs aux éléments d'un circuit électrique

Tableau récapitulatif

Elément	Domaine temporel	Domaine phasoriel
R	$v = Ri$	$\underline{V} = R\underline{I}$
L	$v = L\frac{di}{dt}$	$\underline{V} = j\omega L\underline{I}$
C	$i = C\frac{dv}{dt}$	$\underline{V} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$

26